Να βρείτε αν υπάρχει, την παράγωγο της συνάρτησης, $f(x) = x^2 + |x-3|$ στο $x_0 = 3$

<u>ΛΥΣΗ</u>

$f(3) = 9$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 3, & x \geq 3 \\ x^2 + 3 - x, & x < 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = \lim_{x \to 3^-} \frac{x^2 + 3 - x - 9}{x-3} = \lim_{x \to 3^-} \frac{x^2 - x - 6}{x-3} =$$

$$= \lim_{x \to 3^-} \frac{\cancel{(x-3)}(x+2)}{\cancel{x-3}} = 5$$

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 + x - 3 - 9}{x-3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 + x - 12}{x-3} =$$

$$= \lim_{x \to 3^+} \frac{\cancel{(x-3)}(x+4)}{\cancel{x-3}} = 7$$

Άρα, αφού $\lim_{x \to 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} \neq \lim_{x \to 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x-3}$

Τότε η f <u>όχι</u> παραγωγίσιμη στο $x_0 = 3$

) Να εξεταστεί αν η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \sigma\upsilon\nu x \cdot \sqrt{x+4}, & x \geq 0 \\ e^x \sqrt{x^2+9}, & x < 0 \end{cases}$$

Παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

ΛΥΣΗ

- $f(0) = 2$
- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sigma\upsilon\nu x \sqrt{x+4} = 2$
- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^x \sqrt{x^2+9} = 3$

Αρα, λόγω ότι $\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$

Η f είναι ασυνεχής στο $x_0=0$

Αρα, όχι παραγωγίσιμη σε αυτό

Να βρείτε για ποιες τιμές των $\alpha,\beta \in R$ η

$$f(x) = \begin{cases} x^2+\alpha x+\beta, & x > 1 \\ 2x^2-\alpha x+3\alpha+1, & x \leq 1 \end{cases}$$

Είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$

ΛΥΣΗ

Αφού η f παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ άρα και συνεχής σε αυτό το σημείο.

$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$ Δηλαδή $\exists \lim_{x\to 1} f(x)$

Αρα,

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) \quad ①$$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x^2+\alpha x+\beta) = \alpha+\beta+1$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (2x^2-\alpha x+3\alpha+1) = 3+2\alpha$

$\overset{①}{\Rightarrow} \alpha+\beta+1 = 3+2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \beta = 2+\alpha \quad ②$

Έπειτα, η f παραγωγίσιμη στο $x_0=1$

Άρα, $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

Δηλαδή $\exists\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

Άρα,

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \quad (3)$$

- $$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2+\alpha x+\cancel{\beta}-\alpha-\cancel{\beta}-1}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2+\alpha x-\alpha-1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\alpha(x-1)+(x^2-1)}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{\alpha(x-1)+(x-1)(x+1)}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{\cancel{(x-1)}(\alpha+(x+1))}{\cancel{x-1}}=\alpha+2$$

- $$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{2x^2-\alpha x+3\alpha+\cancel{1}-\alpha-\beta-\cancel{1}}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{2x^2-\alpha x+2\alpha-\beta}{x-1}\overset{(2)}{=}\lim_{x\to1^-}\frac{2x^2-\alpha x+2\alpha-2-\alpha}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{2x^2-\alpha x+\alpha-2}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{2(x^2-1)-\alpha(x-1)}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{2(x-1)(x+1)-\alpha(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\cancel{(x-1)}(2(x+1)-\alpha)}{\cancel{x-1}}=$$

$$=\lim_{x\to1^-}2x+2-\alpha=4-\alpha$$

(3) $\alpha+2=4-\alpha \Rightarrow 2\alpha=2\Rightarrow \alpha=1$

Άρα (2) $\beta=\alpha+2\Rightarrow\beta=1+2\Rightarrow\beta=3$